MATEMÁTICAS (PRUEBA DE COMPETENCIA ESPECÍFICA)

INSTRUCCIONES GENERALES PARA LA PRUEBA Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN

English translation available below

Instrucciones generales

- Dispone de 90 minutos para realizar el examen.
- Se permite el uso de calculadora científica que **no** posea alguna de las siguientes capacidades: Cálculo estadístico, cálculo matricial, representación gráfica y lenguaje alguno de programación. No está permitido el uso de ordenadores, tablets, teléfonos, reloj inteligente, ni ningún tipo de material electrónico o aparatos de comunicación.
- Mientras tenga el examen en su poder **solo** puede comunicarse con los miembros del tribunal de examen. Cualquier otro tipo de comunicación o uso de dispositivos o materiales no autorizados supondrá la retirada del examen, lo cual será reflejado en el acta como **copia ilegal**.
- El examen debe realizarse con bolígrafo azul o negro.
- No puede utilizar ningún tipo de corrector (tipp-Ex) en la hoja de respuestas tipo test.
- No puede utilizar ninguna hoja que no haya sido entregada por algún miembro del tribunal de examen. Las hojas de respuesta deben ir numeradas en las casillas que aparecen en la parte inferior.
- El examen está traducido al inglés con el objetivo de facilitar la comprensión de las preguntas, pero **debe contestarse en español**. En caso de que considere que hay alguna diferencia de interpretación entre la parte en español y la parte traducida al inglés, prima el examen original realizado en español.

Criterios de evaluación

La prueba consta de dos partes.

- **Primera parte de la prueba**: La calificación máxima de este bloque es de 5 puntos. Debe contestar a un **máximo de 10** preguntas de las 15 posibles. En caso de contestar más, solo se tendrán en cuenta las 10 primeras. Cada pregunta correcta suma 0.5 puntos, mientras que cada pregunta incorrecta resta 0.1 puntos. Las preguntas sin contestar o con doble marca no suman ni restan puntos. Las preguntas deben contestarse realizando una marca adecuada en la hoja de respuestas que se adjunta.
- **Segunda parte de la prueba**: La calificación máxima de este bloque es de 5 puntos. Cada problema se valora hasta 2.5. Se debe contestar **solamente una opción** con dos problemas de desarrollo. Redacte cada problema en hojas separadas. La parte de problemas se contestará en hojas aparte. **En caso de que se hagan dos problemas de dos opciones diferentes, solo se calificará el primer problema entregado**. De igual manera, si se hacen más de dos problemas solo se calificarán los dos primeros que sean válidos de acuerdo con la observación anterior.

Sólo debe entregar **la hoja de identificación, la hoja de lectura óptica y las hojas con los problemas desarrollados**.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2022/23.

PREGUNTAS TIPO TEST — Modelo 01.A

Conteste a un máximo de 10 cuestiones.

1 Sea A la matriz real (con a, b, c arbitrarios)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Entonces, se cumple:

(A) Si $b = c$, entonces rango$(A) = 1$.

(B) Si $b = 0$, entonces rango$(A) = 2$.

(C) Ninguna de las anteriores.

2 Toda matriz real A cuadrada invertible cumple que:

(A) $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$, donde $A^\top$ es la traspuesta.

(B) $\det(A^{-1}) = -\det(A)$.

(C) Ninguna de las anteriores.

3 Si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \lambda \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

es ortogonal, entonces:

(A) $\lambda > 0$.

(B) $\lambda < 0$.

(C) Ninguna de las anteriores.

4 Toda A matriz real cuadrada tal que $A^2 = A$, cumple que:

(A) $\det(A) > 0$.

(B) Si A es regular, $A = I$ (la matriz identidad).

(C) Ninguna de las anteriores.

5 Sean las rectas $r : (0, -1, 1) + a(1, 3, -4)$ y $s : (1, 0, 0) + b(1, 0, 1)$ en el espacio:

(A) Son secantes.

(B) La distancia entre ellas es $\sqrt{43}/43$.

(C) Ninguna de las otras dos.

6 La distancia del punto $(2, 1, 3)$ a la recta $x = 2y = 3z$ es:

(A) Mayor que 1.

(B) Menor que 1.

(C) Ninguna de las otras dos.

7 En el espacio tridimensional se consideran el plano $\pi : 3x - 2y - z = 2$ y la recta

$$r : \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Entonces:

(A) El plano y la recta se cortan perpendicularmente.

(B) La recta está contenida en el plano.

(C) Ninguna de las otras dos.

8 Para toda $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), se cumple que:

(A) Existe un $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) = f'(\theta)(b - a)$.

(B) Existe un $\theta \in (a, b)$ tal que $f(b) = f(a) + f'(\theta)(b - a)$.

(C) Ninguna de las otras dos.

9 El límite $L = \lim\limits_{x \to 0^+} x^n \ln x$, con $n > 0$:

(A) Tiene un valor $L < 0$ independiente de n.

(B) No existe.

(C) Ninguna de las otras dos.

10 Para toda $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ función continua en $[a, b]$ y tal que $f(a)f(b) > 0$, se cumple que:

(A) Existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

(B) No necesariamente existe algún $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.

(C) Ninguna de las otras dos.

11 La función

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(A) Es creciente en todo su dominio.

(B) Es decreciente en $(-\infty, 0)$.

(C) Ninguna de las otras dos.

12 Se tiene un bote con caramelos de colores: rojo, amarillo, verde, azul y naranja. Se sabe que la probabilidad de sacar al azar un caramelo rojo es 0,2, la de sacar uno amarillo es 0,15, uno verde 0,1 y uno azul 0,3. Si se sacan 60 caramelos de la bolsa, ¿cuántos esperaríamos que haya de color naranja (denotamos ese número por N)?

(A) $8 \leq N \leq 14$.

(B) $13 \leq N \leq 18$.

(C) Ninguna de las otras dos.

13 Se pregunta a 50 consumidores si les gustan dos productos A y B. Hay 37 personas que a las que les gusta el producto A y, de ellas, hay 25 a las que también les gusta el producto B. Hay 3 personas a las que no les gusta ninguno de los dos. Se elige al azar una de las personas entre las que sí les gusta B. ¿Cuál es la probabilidad p de que no le guste A?

(A) $0{,}25 < p < 0{,}3$.

(B) $0{,}2 < p < 0{,}25$.

(C) Ninguna de las otras dos.

14 Se tienen dos sucesos A y B con probabilidades respectivas $p(A) = 0{,}6$ y $p(B) = 0{,}7$. Entonces:

(A) Los sucesos A y B son tales que $A \cup B$ es necesariamente el espacio total.

(B) Los sucesos A y B pueden ser disjuntos.

(C) Ninguna de las otras dos.

15 Un dado no trucado se lanza dos veces. ¿Cuál es la probabilidad p de sacar un 2 en la primera tirada y no sacar el 4 en la segunda?

(A) $0{,}1 < p < 0{,}15$.

(B) $0{,}15 < p < 0{,}2$.

(C) Ninguna de las otras dos.

PREGUNTAS TIPO DESARROLLO — Modelo 01.A

Elija **una sola opción** y conteste a los problemas en **hojas separadas**.

Opción 1

1

a) Estudiar la posición relativa en el espacio de los planos π_1 y π_2, con ecuaciones respectivas:

$$\pi_1 : x + 2y - z = 3$$
$$\pi_2 : ax + (a-2)y + 2z = 4\,,$$

en función del parámetro real $a \in \mathbb{R}$.

b) Determinar, en el caso en que los planos se intersecten a lo largo de una recta, un vector director de la misma.

2 Dada la función real

$$f(x) = \ln\sqrt{4 - x^2}$$

(donde ln denota el logaritmo natural o neperiano), se pide:

a) Representar gráficamente la curva $y = f(x)$, discutiendo razonadamente su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y extremos relativos.

b) Determinar las pendientes de las rectas tangentes a la gráfica de la función en los puntos donde corta al eje de abscisas. ¿Cuál es el ángulo que forma cada una de estas rectas tangentes con el eje de las x?

Opción 2

3 Calcular las integrales indefinidas siguientes:

a)

$$\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

b)

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

4 Se ha realizado un estudio de valoración de un determinado candidato político, tomando una muestra de 80 hombres y 120 mujeres, con los siguientes resultados (dados en función de un parámetro real $\delta \in \mathbb{R}$):

	Nº hombres	Nº mujeres	Total
Nº valoraciones positivas	$50 - \delta$	$40 + \delta$	90
Nº valoraciones negativas	$30 + \delta$	$80 - \delta$	110
Total	80	120	200

Si se elige una persona al azar de entre la muestra, calcular las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) Sabiendo que es hombre, que tenga una valoración positiva del candidato.

b) Que sea hombre y favorable al candidato.

c) Que sea mujer o que esté a favor del candidato.

d) ¿Qué valor debe tener el parámetro δ para que los sucesos “ser mujer” y “no estar a favor del candidato” sean independientes?

MATHEMATICS (PRUEBA DE COMPETENCIA ESPECÍFICA)
GENERAL INSTRUCTIONS AND EVALUATION CRITERIA

General instructions

- The allowed time is 90 minutes.
- The use of a scientific calculator that does **not** have any of the following capabilities is allowed: Statistical calculation, matrix calculation, graphic representation, and any programming language. The use of computers, tablets, telephones, smart watches, or any type of electronic material or communication devices is not allowed.
- While doing the exam, you can interact only with the members of the examination board. Any other kind of communication or use of non-authorized devices or materials will lead to the expulsion of the examination hall, this being reflected in the minute as **illegal cheating**.
- Only black or blue ink pens are permitted.
- The use of any kind of correction fluid or tape (Tipp-Ex) is not allowed in the test answers sheet.
- It is not allowed to use any sheet not provided by a member of the examination board. The answers sheets must be consecutively numbered in the boxes located at the bottom of the page.
- This English translation is provided only to facilitate the understanding of statements, but **answers must be written exclusively in Spanish**. In case you detect any discrepancy of meaning between the Spanish and English statements, it will prevail the Spanish one.

Grading criteria

The exam consists of two parts.

- **First part**: The maximum grade for this block is 5 points. You must answer **a maximum of 10** test questions, out of the 15 provided. In case more than 10 questions are answered, only the first 10 will be taken into account. Each correct answer scores 0.5 points, while those incorrect, discounts 0.1 in the final grade. Blank answers or doubly-marked ones, do not sum neither subtract points. Answers must be given by making an appropriate mark in the attached (optical) answers sheet.
- **Second part**: The maximum grade for this block is 5 points. Each problem scores up to 2.5 points. **Only one of the two options must be answered**, each consisting of two problems that must be answered in **separate sheets**. Notice that **in case you answer two problems from different options, only the first one** will be counted. Similarly, if there are three or more problems, only the first valid two, according to the preceding remark, will be taken into account.

Only the **identification sheet, the optical sheet, and the sheets with the development problems** must be handed in to the examination board.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA
Prueba de Competencia Específica. Matemáticas. Curso 2022/23.

MULTIPLE CHOICE QUESTIONS — Model 01.A

Answer a maximum of 10 questions.

1 Let A be the real matrix (with a, b, c arbitrary)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

Then, it holds true:

(A) If $b = c$, then $\text{rank}(A) = 1$.

(B) If $b = 0$, then $\text{rank}(A) = 2$.

(C) None of the above.

2 For any real square invertible matrix A, it holds true:

(A) $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$, where $A^\top$ is the transpose.

(B) $\det(A^{-1}) = -\det(A)$.

(C) None of the above.

3 If the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & \lambda \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

is orthogonal, then:

(A) $\lambda > 0$.

(B) $\lambda < 0$.

(C) None of the above.

4 Any real square matrix A such that $A^2 = A$, satisfies:

(A) $\det(A) > 0$.

(B) If A is regular, $A = I$ (the identity matrix).

(C) None of the above.

5 Consider the straight lines $r : (0, -1, 1) + a(1, 3, -4)$ and $s : (1, 0, 0) + b(1, 0, 1)$ in the Euclidean space:

(A) They intersects.

(B) The distance between them equals $\sqrt{43}/43$.

(C) None of the above.

6 The distance between the point $(2, 1, 3)$ and the straight line $x = 2y = 3z$ is:

(A) Greater than 1.

(B) Less than 1.

(C) None of the above.

7 In the three-dimensional Euclidean space, consider the plane $\pi : 3x - 2y - z = 2$ and the straight line

$$r : \begin{cases} 2x + 2y + 2z = 1 \\ x + 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

Then:

(A) They intersect perpendicularly.

(B) The straight line is contained in the plane.

(C) None of the above.

8 For any function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuous on $[a, b]$ and derivable on (a, b), it holds true:

(A) There exists a $\theta \in (a, b)$ such that $f(b) = f'(\theta)(b - a)$.

(B) There exists a $\theta \in (a, b)$ such that $f(b) = f(a) + f'(\theta)(b - a)$.

(C) None of the above.

9 The limit $L = \text{lím}_{x \to 0^+} x^n \ln x$, with $n > 0$:

(A) Has a value $L < 0$ independent of n.

(B) It does not exist.

(C) None of the above.

10 For any $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuous on $[a, b]$ and such that $f(a)f(b) > 0$, it holds true:

(A) There exists some $c \in (a, b)$ such that $f(c) = 0$.

(B) Not necessarily does exist some $c \in (a, b)$ such that $f(c) = 0$.

(C) None of the above.

11 The function

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(A) Is increasing on its entire domain.

(B) Is decreasing on $(-\infty, 0)$.

(C) None of the above.

12 A can has candies of different colors: red, yellow, green, blue, and orange. If a candy is randomly drawn, it is known that the probability of it being red equals 0,2, that of being yellow 0,15, green 0,1, and blue 0,3. If 60 candies are randomly drawn, how many of them do we expect to be orange (denote that number by N)?

(A) $8 \leq N \leq 14$.

(B) $13 \leq N \leq 18$.

(C) None of the above.

13 In a survey, 50 costumers are asked whether they like or dislike two products, A and B. There are 37 customers who like product A and, among them, there are 25 who also like product B. There are 3 customers who do not like neither A nor B. If a customer is chosen at random among those liking B, what is the probability p that the customer does not like A?

(A) $0{,}25 < p < 0{,}3$.

(B) $0{,}2 < p < 0{,}25$.

(C) None of the above.

14 Two random events A and B, have respective probabilities $p(A) = 0{,}6$ and $p(B) = 0{,}7$. Then:

(A) The events A and B are such that $A \cup B$ is the total sample space.

(B) The events A and B can be disjoint.

(C) None of the above.

15 A fair die is rolled twice. What is the probability p of getting a 2 in the first roll and not getting 4 in the second one?

(A) $0{,}1 < p < 0{,}15$.

(B) $0{,}15 < p < 0{,}2$.

(C) None of the above.

DEVELOPMENT QUESTIONS — Model 01.A

Choose just one option. Answer each problem on a separate sheet of paper.

Option 1

1

a) Study the relative position in space of the planes with equations:

$$\pi_1 : x + 2y - z = 3$$
$$\pi_2 : ax + (a-2)y + 2z = 4\,,$$

as a function of the real parameter $a \in \mathbb{R}$.

b) In the case in which the planes intersect along a straight line, determine a direction for this line.

2 Given the real function

$$f(x) = \ln\sqrt{4 - x^2}$$

(where ln stands for natural, or Neperian, logarithm), it is asked:

a) To graphically represent the curve $y = f(x)$, discussing its domain, range, asymptotes, increasing and decreasing intervals, and critical points.

b) To determine the slope of the tangent line to the graph of the function at the points where it intersects the $x-$axis. What is the angle these tangent lines define with respect to the $x-$axis?

Option 2

3 Evaluate the following indefinite integrals:

a)

$$\int \frac{\ln x}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

b)

$$\int \frac{xe^x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

4 A study is conducted in order to determine a candidate's popularity, making a poll among a sample composed of 80 men and 120 women, giving the following results (as a function of a real parameter $\delta \in \mathbb{R}$):

	# men	# women	Total
# positive perceptions	$50 - \delta$	$40 + \delta$	90
# negative perceptions	$30 + \delta$	$80 - \delta$	110
Total	80	120	200

If a person is randmly selected among the sample, compute the probability of the following events:

a) Knowing that person is a man, that he has a positive perception of the candidate.

b) That the person is a man and have a positive perception.

c) That the person is a woman or is favorable to the candidate.

d) What should be the value of the parameter δ in order for the events "being a woman" and "having a negative perception" being independent?